الفصل السادس

- **مقاييس التشتت :**

يقصد بالتشتت أو الاختلاف / بأنه التباعد او التقارب الموجودبين قيم المشاهدات التابعة لمتغير ما وتقيس هذه المقاييس مدى انتشار او تباعد القيم مقارنة بوسطها الحسابي ، وكلما كان مقياس التشتت كبيراً دل ذلك على عدم التجانس بين القيم أما اذا كان مقياس التشتت صغيراً تكون الاختلافات بين قيم المشاهدات قليلة اي انها اكثر تجانس ، وقد ذكرنا بان مقاييس التمركز (مقاييس النزعة المركزية) تعطينا فكرة عن مكان تمركز قيم المشاهدات بينما نلاحظ ان مقاييس التشتت تعطينا فكرة عن مدى تجانس او تباين هذه القيم حول مركزها اي درجة انتشارها.

ان مقاييس التوسط (النزعة المركزية) وحدها لاتكفي لهذا الغرض فقد يتساوى الوسط الحسابي لمجموعتين من القيم مثلاً بينما يختلف انتشار قيم المجموعة الاولى عن انتشار قيم المجموعة الثانية كما في المثال الآتي:

المجموعة الاولى $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = 19$ 16,19,22,17,18,20,21

المجموعة الاولى $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = 19$ 34,14,6,4,44,19,12

فالوسط الحسابي لكل من المجموعتين هو (19) ولكن المجموعة الاولى تبدو اكثر تجانسا.

وأهم مقاييس التشتت

اولاً/ مقاييس التشتت المطلق:

1) الانحراف المتوسط:/ Mean deviation

وهو مجموع الانحرافات المطلقة للقيم عن وسطها الحسابي مقسوم على عددها

في حالة البيانات الغير مبوبة

$$\mathbf{M.D} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

في حالة البيانات المبوبة

$$\mathbf{M.D} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i}$$

- **امثلة حول البيانات الغير مبوبة:**

مثال1/ جد الانحراف المتوسط للقيم التالية؟

x_i=9,8,6,5,7

x_i	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$
9	-2	2
8	1	1
6	-1	1
5	-2	2
7	0	0
35	0	6

$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{35}{5} = 7$

$\mathbf{M.D} = \frac{\sum \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{n} = \frac{6}{5} = 1.2$

مثال2/ للبيانات التالية جد الانحراف المتوسط؟

x_i=2,3,4,5,5,6,7,10,13,14,19

x_i	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$
2	-6	6
3	-5	5
4	-4	4
5	-3	3
5	-3	3
6	-2	2
7	-1	1
10	2	2
13	5	5
14	6	6
19	11	11
$\sum x_i$=88		48

$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{88}{11} = 8$

$\mathbf{M.D} = \frac{\sum \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{n} = \frac{48}{11} = 4.36$

- **امثلة حول البيانات المبوبة:**

مثال1/ جد الانحراف المتوسط لجدول التوزيع التكراري التالي؟

الفئات	f_i	x_i	f_ix_i	$x_i - \bar{x}$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i\|x_i - \bar{x}\|$
60-62	5	61	305	- 6.45	6.45	32.25
63-65	18	64	1152	- 3.45	3.45	62.10
66-68	42	67	2814	0.45	0.45	18.90
69-71	27	70	1890	2.55	2.55	68.85
72-62	8	73	584	5.55	5.55	44.40
	100		6745			226.50

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{6745}{100} = 67.45$$

$$\mathbf{M.D} = \frac{\sum f_i|x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{226.50}{100} = 2.265$$

مثال2/ احسب الانحراف المتوسط للبيانات التالية التي تمثل تكرارات اعمال (25) طالب في احدى المدارس الخاصة علما بان الحد الادنى لعمر الطالب (6) سنوات وان الطلبة موزعين على فئات بطول (3) سنوات للفئة الواحدة وان الوسط الحسابي يساوي ($\bar{x} = 13$)؟

الفئات	f_i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i\|x_i - \bar{x}\|$
6-8	4	7	- 9	9	36
9-11	5	10	- 8	8	40
12-14	6	13	-7	7	42
15-17	8	16	-5	5	40
18-20	2	19	-11	11	22
	25				180

$$\mathbf{M.D} = \frac{\sum f_i|x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{180}{25} = 7.2$$

2) التباين :/   variance

هو متوسط مربعات انحراف القيم عن وسطها الحسابي ويستخرج بقسمة مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي مقسوما على عدد القيم ناقص واحد ، ويعرف بانه الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مجموع مربعات انحرافات قيم المتغير العشوائي عن وسطها الحسابي.

في حالة البيانات الغير مبوبة

$$s^2 = \frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n-1}$$

اما قانون القيم الاصلية فهو

$$s^2 = \frac{\sum {x_i}^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}$$

- في حالة البيانات المبوبة

$$s^2 = \frac{\sum f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum f_i - 1}$$

- اما قانون القيم الاصلية فهو

$$s^2 = \frac{\sum f_i {x_i}^2 - \frac{(\sum x_i f_i)^2}{\sum f_i}}{\sum f_i - 1}$$

3) الانحراف المعياري (القياسي):

الانحراف المعياري لعينة ما هو الجذر التربيعي لتباين تلك العينة وقانونه هو:

$$s = \sqrt{s^2}$$

- **امثلة حول البيانات الغير مبوبة**

مثال1/ جد التباين والانحراف المعياري للبيانات التالية علما بان الوسط الحسابي (6)؟

x_i=7,5,8,4,9,7,2

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	${x_i}^2$
7	-1	1	49
5	-1	1	25
8	2	4	64
4	-2	4	16
9	3	9	81
7	1	1	49
2	-4	16	4
42		36	288

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{42}{7} = 6$$

$$1)\ s^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{36}{6} = 6$$

$$2)\ s^2 = \frac{\sum x_i{}^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1} = \frac{288 - \frac{(42)^2}{7}}{6} =$$

$$\frac{288 - \frac{1764}{7}}{6} = \frac{288 - 252}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6} = 2.45$$

مثال2/ البيانت التالية تمثل اوزان عينة من طلبة قوامها (10) طالب والمطلوب حساب الانحراف المعياري؟

x_i=56,68,72,63,65,68,71,69,62,56

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$x_i{}^2$
56	-9	81	3136
68	3	9	4624
72	7	49	5184
63	-2	4	3969
65	0	0	4225
68	3	9	4624
71	6	36	5041
69	4	16	7461
62	-3	9	3844
56	-9	81	3136
650		294	42544

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{650}{10} = 65$$

$$1)\ s^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{294}{9} = 32.66$$

$$2)\ s^2 = \frac{\sum x_i{}^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1} = \frac{42544 - \frac{(650)^2}{710}}{69} =$$

$$\frac{42544-\frac{422500}{10}}{9} = \frac{42544-42250}{9} = \frac{294}{9} = \mathbf{32.66}$$

$$s=\sqrt{\boldsymbol{s^2}} = \sqrt{\mathbf{32.66}} = 5.71$$

مثال3/ البيانت التالية تبين كمية المحصول للقطعة (كغم) من القطن لخمس مزارع احسب التباين والانحراف المعياري؟

x_i=9, 8,6,5,7

x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
9	2	4
8	1	1
6	-1	1
5	-2	4
7	0	0
35		10

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{35}{151} = 7$$

$$1)\ s^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{10}{4} = \mathbf{2.5}$$

$$1)\ s=\sqrt{\boldsymbol{s^2}} = \sqrt{\mathbf{2.5}} = 1.58$$

مثال4/اذا علمت بان كل من $(\sum_{i=1}^{5} x_i{}^2 = 255)$ وقيمة $(\sum_{i=1}^{5} x_i = 35)$ فجد كل من التباين والانحراف المعياري؟

$$1)\ s^2 = \frac{\sum x_i{}^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1} = \frac{255-\frac{(35)^2}{5}}{4} =$$

$$\frac{255-\frac{1225}{5}}{4} = \frac{255-245}{4} = \frac{10}{4} = \mathbf{2.5}$$

$$s=\sqrt{\boldsymbol{s^2}} = \sqrt{\mathbf{2.5}} = 1.58$$

- **امثلة حول البيانات المبوبة**

مثال1/ احسب الانحراف المعياري والتباين لجدول التوزيع التكراري التالي ؟

الفئات	f_i	x_i	f_ix_i	$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$	$f_i(x_i-\overline{x})^2$
11-15	2	13	26	-18	324	648
16-20	3	18	54	-12	144	432
21-25	4	23	92	-7	49	196
26-30	9	28	252	-2	4	36
31-35	2	33	66	3	9	18
36-40	16	38	608	8	64	1024
	36		1098		594	2354

$$1)\ s^2=\frac{\sum f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum f_i-1}$$

$$\overline{x}=\frac{\sum x_if_i}{\sum f_i}=\frac{1098}{36}=30.5\cong 31$$

$$s^2=\frac{2354}{35}=67.25$$

$$2)\ s=\sqrt{s^2}=\sqrt{67.25}=8.2$$

مثال2/ احسب الانحراف المعياري والتباين لجدول التوزيع التكراري التالي ؟

الفئات	f_i	x_i	f_ix_i	$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$	$f_i(x_i-\overline{x})^2$
60-62	5	61	305	-4.26	18.14	90.7
63-65	18	64	1152	-1.2	1.56	28.08
66-68	42	67	2814	1.74	1.59	66.78
69-71	27	70	1890	4.74	22.47	606.69
72-74	5	73	365	7.74	59.9	299.5
	100	335	6526		103.66	1091.75

$$1)\ s^2=\frac{\sum f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum f_i-1}$$

$$\overline{x}=\frac{\sum x_if_i}{\sum f_i}=\frac{6526}{100}=65.26$$

$$s^2 = \frac{1091.75}{99} = 11.02$$

3) $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{11.02} = 3.32$

مثال3/ اذا علمت بان قيمة كل من

$$\sum_{i=1}^{100} f_i x_i^{\ 2} = 455803$$

$$\sum_{i=1}^{100} f_i x_i = 6745$$

فجد كل من التباين والانحراف المعياري؟

1) $$s^2 = \frac{\sum f_i x_i^{\ 2} - \frac{(\sum x_i f_i)^2}{\sum f_i}}{\sum f_i - 1}$$

$$s^2 = \frac{455803 - \frac{(6745)^2}{100}}{99}$$

$$= \frac{455803 - \frac{45495025}{100}}{99}$$

$$= \frac{455803 - 454950.25}{99}$$

$$= \frac{852.75}{99} = 8.61$$

2) $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{8.61} = 2.9$

مثال4/ احسب الانحراف المعياري والتباين لجدول التوزيع التكراري التالي ؟

الفئات	f_i	x_i	$f_i x_i$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$
2-3	3	2.5	7.5	-3.5	12.25	36.75
4-5	1	4.5	4.5	-1.5	2.25	2.25
6-7	3	6.5	19.5	0.5	0.25	0.75
8-9	2	8.5	17	2.5	6.25	12.5
10-11	1	10.5	10.5	4.5	6.25	20.25
	10	335	59			72.5

$$1)\ \boldsymbol{s^2} = \frac{\sum \boldsymbol{f_i(x_i - \overline{x})^2}}{\sum \boldsymbol{f_i - 1}}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum \boldsymbol{x_i f_i}}{\sum \boldsymbol{f_i}} = \frac{59}{10} = 5.9 \cong 6$$

$$\boldsymbol{s^2} = \frac{\mathbf{72.5}}{\mathbf{9}} = 8.06$$

$$\mathbf{4)}\ s = \sqrt{\boldsymbol{s^2}} = \sqrt{\mathbf{8.06}} = 2.83$$

الطريقة الثانية

اذا علمت بان قيمة كل من

$$\sum_{i=1}^{100} \boldsymbol{f_i x_i}^{\mathbf{2}} = 420.5$$

$$\sum_{i=1}^{100} \boldsymbol{f_i x_i} = 59$$

فجد كل من التباين والانحراف المعياري؟

$$\mathbf{1)}\boldsymbol{s^2} = \frac{\sum \boldsymbol{f_i x_i}^{\mathbf{2}} - \frac{(\sum \boldsymbol{x_i f_i})^{\mathbf{2}}}{\sum \boldsymbol{f_i}}}{\sum \boldsymbol{f_i} - \mathbf{1}}$$

$$\boldsymbol{s^2} = \frac{\mathbf{420.5} - \frac{(\mathbf{59})^{\mathbf{2}}}{\mathbf{10}}}{\mathbf{9}}$$

$$= \frac{\mathbf{420.5} - \frac{\mathbf{3481}}{\mathbf{10}}}{\mathbf{9}}$$

$$= \frac{\mathbf{420.5} - \mathbf{348.1}}{\mathbf{9}}$$

$$= \frac{\mathbf{72.4}}{\mathbf{9}} = \mathbf{8}.04$$

$$2)\ s = \sqrt{\boldsymbol{s^2}} = \sqrt{\mathbf{8.04}} = 2.83$$

ثانيا/ مقاييس التشتت النسبي:

مقاييس التشتت النسبي لها اهميتها عند مقارنة تشتت مجموعتين او اكثر تختلف في وحدات القياس لقيمها لان مقاييس التشتت النسبي تكون خالية من وحدات القياس واهم مقاييس التشتت النسبي

1) معامل الاختلاف:

ويستخدم للمقارنة بين درجات تشتت مجموعتين او اكثر من القيم عن اوساطها الحسابية ونرمز له (c.v) ويساوي حاصل قسمة الانحراف المعياري على الوسط الحسابي مظروب في (100).

$$\boldsymbol{c.v = \frac{s}{x} \times 100}$$

ويعد افضل معاملات التشتت السابقة كونه يعتمد على افضل مقياس نزعة مركزية وافضل مقياس تشتت ، ان هذا المعامل يوضح نسبة حصة كل وحدة من وحدات الوسط الحسابي من الانحراف المعياري.

مثال1/ اذا كان متوسط درجات طلبة الصف الاول محاسبة في مادة الرياضيات (69) درجة بانحراف معياري مقداره (19.3) في حين كان متوسط درجاتهم في امتحان الاحصاء (75) درجة بانحراف معياري قدره (25.5) في اي امتحان كان مستوى اداء الطلبة اكثر تقاربا؟

1) بالنسبة لامتحان الرياضيات

$$\boldsymbol{c.v = \frac{s}{x} \times 100\ \%}$$

$$\boldsymbol{c.v = \frac{19.3}{69} \times 100 = 28\%}$$

2) بالنسبة لامتحان الاحصاء

$$\boldsymbol{c.v = \frac{s}{x} \times 100\ \%}$$

$$\boldsymbol{c.v = \frac{25.5}{75} \times 100 = 34\%}$$

بما ان معامل الاختلاف في امتحان الرياضيات اقل من امتحان الاحصاء فان مستوى الطلبة في امتحان الرياضيات اكثر تقارباً.

مثال2/ لدينا حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لاعمار مجموعتين من الطلبة اوجد معامل الاختلاف (c.v)؟

المجموعة الاولى $1)\ \bar{x} = 24 \qquad s = 6.16$

المجموعة الثانية $2)\ \bar{x} = 34 \qquad s = 7.14$

1) بالنسبة للمجموعة الاولى $c.v = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\ \%$

$$c.v = \frac{6.16}{24} \times 100 = 25\%$$

2) بالنسبة للمجموعة الثانية $c.v = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\ \%$

$$c.v = \frac{7.14}{34} \times 100 = 21\%$$

بما ان معامل الاختلاف المجموعة الاولى اكبر من المجموعة الثانية اذا المجموعة الاولى اكثر تشتتاً والمجموعة الثانية اكثر تقارباً.

مثال3/ اجريت تجربة لدراسة طول النبات ب(سم) وكمية المحصول ب (كغم) ل (150) نبات من الحنطة فكانت النتائج كالاتي؟

	الطول	كمية المحصول
الوسط الحسابي($\bar{x}$)	200	800
الانحراف المعياري (s)	16	36

1) بالنسبة للطول $c.v = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\ \%$

$$c.v = \frac{16}{200} \times 100 = 8\%$$

2) بالنسبة لكمية المحصول $c.v = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\ \%$

$$c.v = \frac{36}{800} \times 100 = 4.5\%$$

بما ان معامل الاختلاف صفة الطول اكبر من صفة كمية المحصول اذا صفة الطول اكثر تشتتاً وصفة كمية المحصول اكثر تقارباً.

2) الدرجة المعيارية (القياسية):

تستخدم للمفاضلة بين عينتين مختلفتين وكلما كانت الدرجة اكبر كانت افضل والدرجة المعيارية خالية من وحدات القياس للمتغير (x_i)، اما في حالة التوزيعات التكرارية فان (x_i) تمثل مراكز الفئات وان (s) تمثل الانحراف المعياري و $(\overline{x})$ تمثل الوسط الحسابي وقانونه هو:

$$z = \frac{x - \overline{x}}{s}$$

- **خصائص الدرجة المعيارية:**

1) الوسط الحسابي للدرجة المعيارية يساوي (0)

$$\overline{z} = \frac{\sum z_i}{n} = 0$$

2) التباين للدرجة المعيارية يساوي (1)

$$s^2 = \frac{\sum (z_i - \overline{z})^2}{n-1} = 1$$

وبما ان $\bar{Z}=0$ فان

$$s^2 = \frac{\sum (z_i - 0)^2}{n-1} = \frac{\sum (z_i)^2}{n-1} = 1$$

مثال1/ اذا علمت ان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجات قسم ادارة الاعمال في مادة الاحصاء والادارة هي كالاتي

	الاحصاء	الادارة
الوسط الحسابي$(\overline{x})$	75	62
الانحراف المعياري (s)	8	6

فاذا كانت درجة احد الطلبة في الاحصاء (78) والادارة (68) اي من الدروس كان مستوى الطال افضل؟

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

بالنسبة لمادة الاحصاء

$$z = \frac{78 - 75}{8} = \frac{3}{8} = 0.4$$

بالنسبة لمادة الادارة

$$z = \frac{68 - 62}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

وبما ان الدرجة المعياري لمادة الادارة اكبراذا كان مستوى الطالب في الادارة افضل.

مثال2/ حول الدرجات التالية الى درجات معيارية ثم اثبت ان الوسط الحسابي للدرجة المعيارية يساوي صفر والتباين يساوي واحد؟

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
3	-1	1
5	1	1
2	-2	4
6	-1	4
16	0	10

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{16}{4} = 4$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{10}{3} = 3.3$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3.3} = 1.82$$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z_1 = \frac{-1}{1.82} = -0.55$$

$$z_2 = \frac{1}{1.82} = 0.55$$

$$z_3 = \frac{-2}{1.82} = -1.09$$

$$z_4 = \frac{2}{1.82} = 1.09$$

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i}{n} = \frac{0}{4} = 0$$

$$s^2 = \frac{\sum (z_i - \bar{z})^2}{n-1} = 1$$

وبما ان $\bar{z}$=0 فان

$$s^2 = \frac{\sum (z_i - 0)^2}{n-1}$$

$$s^2 = \frac{\sum (z_i)^2}{n-1} = \frac{(-0.55)^2 + (0.55)^2 + (-1.09)^2 + (1.09)^2}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$$

مثال3/ حول الدرجات التالية الى درجات معيارية ؟

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
15	3	9
10	-2	4
18	6	36
12	0	0
5	-7	49
60		98

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{60}{5} = 12$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{98}{4} = 24.5$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{24.4} = 4.95$$

$$z = \frac{x - \overline{x}}{s}$$

$$z_1 = \frac{3}{4.95} = 0.61$$

$$z_2 = \frac{-2}{4.95} = -0.4$$

$$z_3 = \frac{6}{4.95} = 1.22$$

$$z_4 = \frac{0}{4.95} = 0$$

$$z_4 = \frac{-7}{4.95} = -1.42$$

$$\overline{z} = \frac{\sum z_i}{n} = \frac{0}{4} = 0$$

$$s^2 = \frac{\sum(z_i - \overline{z})^2}{n-1} = 1$$

وبما ان $\overline{z}$=0 فان

$$s^2 = \frac{\sum(z_i - 0)^2}{n-1} =$$

$$s^2 = \frac{\sum(z_i)^2}{n-1} = \frac{(0.61)^2 + (-0.4)^2 + (1.22)^2 + (0)^2 + (-1.42)^2}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$$