

## الفصل السابع

### الانحدار الخطي والارتباط البسيط

#### أولاً/ الارتباط البسيط:

في كثير من الدراسات يتطلب من الباحث دراسة حالة وجود متغيرين أو أكثر ترتبط مع بعض بعلاقات خطية معينة فمثلاً العلاقة بين وزن الشخص ب(كغم) وطوله ب(سم) فإذا كان التغير في احد المتغيرات يؤثر على التغير في متغير آخر أو مجموعة متغيرات أخرى عندئذ نقول ان هذه المتغيرات مرتبطة مع بعضها فإذا كان التغير في المتغيرين بنفس الاتجاه يقال ان المتغيرين مرتبطين اي ان الزيادة في احدهما يؤدي الى الزيادة في الآخر في هذه الحالة نقول ان الارتباط فيما بينهما ارتباط موجب فمثلاً الزيادة في طول الشخص تتوقع ان يقابلها زيادة في الوزن اما اذا كان التغير في المتغيرين باتجاه متعاكس اي ان الزيادة او النقصان في احدهما تؤدي الى النقصان او الزيادة في المتغير الآخر هنا نقول ان الارتباط فيما بينهما سالب فمثلاً الزيادة في سعر الوحدة الواحدة في سلعة معينة نتوقع ان تؤدي الى انخفاض الطلب على تلك السلعة ويقال ان الارتباط تام اذا كان التغير في احدهما متناسب مع التغير في المتغير الآخر ويتم حساب الارتباط من خلال معامل الارتباط وعليه يعرف معامل الارتباط.

#### • معامل الارتباط:

هو درجة او قيمة العلاقة التي تربط متغيرين او أكثر مع بعض وهي قيمة حقيقية خالية من وحدات القياس

وهناك عدة انواع من الارتباط:

#### 1) معامل الارتباط الخطي البسيط (معامل بيرسون):

يبحث في مدى وجود علاقة بين متغيرين (x,y) اضافة الى معرفة مدى قوة العلاقة بينهما هل هي (قوية ، ضعيفة ، متوسطة) ونوع العلاقة هل هي (طردية ، عكسية) ونرمز له بالرمز (r) ويحسب وفق الصيغ التالية:

$$1) r = \frac{\sum (xi - \bar{x})(yi - \bar{y})}{\sqrt{\sum (xi - \bar{x})^2 \sum (yi - \bar{y})^2}}$$

$$2) r = \frac{\sum xiyi - \frac{(\sum xi)(\sum yi)}{n}}{\sqrt{(\sum xi^2 - \frac{(\sum xi)^2}{n})(\sum yi^2 - \frac{(\sum yi)^2}{n})}}$$

$$3) r = \frac{n \sum xiyi - \sum xi \sum yi}{\sqrt{(n \sum xi^2 - (\sum xi)^2)(n \sum yi^2 - (\sum yi)^2)}}$$

$$4) r = \frac{\sum xiyi - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum xi^2 - n\bar{x}^2)(\sum yi^2 - n\bar{y}^2)}}$$

هذا وان معامل الارتباط قيمته تتراوح بين ال (+1،-1) اي ان  $-1 \leq r \leq +1$   
 عندما تكون قيمة (r=0) هذا يعني عدم وجود ارتباط خطي بينهما وليس عدم وجود  
 علاقة بينهما

$0 \leq r \leq 0.3$	ضعيفة جداً	علاقة طردية
$0.3 \leq r \leq 0.5$	ضعيفة	
$0.5 \leq r \leq 0.7$	متوسطة	
$0.7 \leq r \leq 0.9$	قوية	
$0.9 \leq r \leq +1$	قوية جداً	
$-0.3 \leq r \leq 0$	ضعيفة جداً	علاقة عكسية
$-0.5 \leq r \leq -0.3$	ضعيفة	
$-0.7 \leq r \leq -0.5$	متوسطة	
$-0.9 \leq r \leq -0.7$	قوية	
$-1 \leq r \leq -0.9$	قوية جداً	

مثال 1/ احسب معامل الارتباط للبيانات التالية والتي تمثل طول وعرض الورقة لنبات ما؟

$x_i$ عرض الورقة	$y_i$ طول الورقة	$x_i y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$
13	15	195	169	225
19	22	418	361	484
13	13	169	169	169
18	20	360	324	400
14	13	182	196	169
17	20	340	289	400
14	15	210	196	225
17	19	323	289	361
15	15	225	225	225
16	18	288	256	324
156	170	2710	2474	2982

$$r = \frac{\sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sqrt{(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n})(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n})}}$$

$$r = \frac{2710 - \frac{(156)(170)}{10}}{\sqrt{(2474 - \frac{(156)^2}{10})(2982 - \frac{(170)^2}{10})}}$$

$$r = \frac{2710 - \frac{26520}{10}}{\sqrt{(2474 - \frac{24336}{10})(2982 - \frac{28900}{10})}}$$

$$r = \frac{2710 - 2652}{\sqrt{(2474 - 2433.6)(2982 - 2890)}}$$

$$r = \frac{58}{\sqrt{(40.4)(92)}} = \frac{58}{\sqrt{3716.8}} = \frac{58}{61} = 0.95$$

وبما ان (r=0.95) اذا هناك علاقة طردية قوية جداً

مثال 2/ البيانات التالية تمثل الكمية المعروضة من سلعة معينة وسعر الوحدة الواحدة من هذه السلعة والمطلوب حساب معامل الارتباط البسيط بين الكمية المعروضة والسعر؟

الكمية المعروضة $y_i$	السعر $x_i$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$
3	2	-4	-2	16	4	8
5	2	-2	-2	4	4	4
7	5	0	1	0	1	0
8	4	1	0	1	0	0
9	5	2	1	4	1	2
11	6	4	2	16	4	8
6	3	-1	-1	1	1	1
8	5	1	1	1	1	1
6	4	-1	0	1	0	0
63	36			44	16	24

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{\sum yi}{n} = \frac{63}{9} = 7$$

$$r = \frac{\sum(xi - \bar{x})(yi - \bar{y})}{\sqrt{\sum(xi - \bar{x})^2 \sum(yi - \bar{y})^2}} = \frac{24}{\sqrt{(16)(44)}}$$

$$= \frac{24}{\sqrt{704}} = \frac{24}{26.5} = 0.905 \cong 0.91$$

وبما ان (r=0.91) اذا هناك علاقة طردية قوية

مثال 3/ احسب معامل الارتباط (معامل بيرسون) للبيانات التالية؟

yi	xi	(yi - $\bar{y}$ )	(xi - $\bar{x}$ )	(yi - $\bar{y}$ ) <sup>2</sup>	(xi - $\bar{x}$ ) <sup>2</sup>	(yi - $\bar{y}$ )(xi - $\bar{x}$ )	xiyi	yi <sup>2</sup>	xi <sup>2</sup>
4	1	-1	-6	1	36	6	4	16	1
5	4	0	-3	0	9	0	20	25	16
6	8	1	1	1	1	1	48	36	64
3	7	-2	0	4	0	0	21	9	49
7	15	2	8	4	64	16	105	49	225
25	35			10	110	23	198	135	355

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{35}{5} = 7$$

$$\bar{y} = \frac{\sum yi}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

$$r = \frac{\sum(xi - \bar{x})(yi - \bar{y})}{\sqrt{\sum(xi - \bar{x})^2 \sum(yi - \bar{y})^2}} = \frac{23}{\sqrt{(110)(10)}}$$

$$= \frac{23}{\sqrt{1100}} = \frac{23}{33.16} = 0.69$$

وبما ان (r=0.69) اذا هناك علاقة طردية متوسطة

$$r = \frac{n \sum xiyi - \sum xi \sum yi}{\sqrt{(n \sum xi^2 - \sum(xi)^2)(n \sum yi^2 - \sum(yi)^2)}}$$

$$r = \frac{5(198) - (25)(35)}{\sqrt{(5(355) - (35)^2)(5(135) - (125)^2)}}$$

$$= \frac{115}{\sqrt{(550)(50)}} = \frac{115}{\sqrt{27500}} = \frac{115}{165.8} = 0.69$$


---

مثال 4/ اوجد قوة العلاقة باستخدام معامل الارتباط (بيرسون) حيث ان

$$\sum_{i=1}^6 xi = 36 \quad , \quad \sum_{i=1}^6 yi = 54 \quad , \quad \sum_{i=1}^6 xiyi = 118$$

$$\sum_{i=1}^6 yi^2 = 518 \quad , \quad \sum_{i=1}^6 xi^2 = 316 \quad , \quad \sum_{i=1}^6 xi^2yi = 410$$

الحل/

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{\sum yi}{n} = \frac{54}{6} = 9$$

$$r = \frac{\sum xiyi - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum xi^2 - n\bar{x}^2)(\sum yi^2 - n\bar{y}^2)}}$$

$$r = \frac{118 - 6(6)(9)}{\sqrt{(316 - 6(6)^2)(518 - 6(9)^2)}}$$

$$r = \frac{118 - 324}{\sqrt{(316 - 216)(518 - 486)}}$$

$$r = \frac{-206}{\sqrt{(100)(32)}} = \frac{-206}{\sqrt{3200}} = \frac{-206}{56.56} = -0.36$$

وبما ان (r=-0.36) اذا العلاقة عكسية وضعيفة

مثال 5/ البيانات التالية عن مستوى الدخل الشهري ( $x_i$ ) ومستوى الاستهلاك الشهري ( $y_i$ ) المطلوب حساب معامل الارتباط البسيط (بيرسون) مع التعليق على النتيجة؟

$x_i$	$y_i$
80	90
85	80
90	85
105	100
115	110
120	115
125	120
720	700

مثال 6/ اوجد قوة العلاقة بين المتغيرين ( $x_i, y_i$ ) باستخدام معامل الارتباط الملائم؟

$x_i$	$y_i$
7	5
1	4
6	3
4	4
7	4
8	6
2	2
35	28

## ثانياً/معامل ارتباط الرتب (سبيرمان):

نستند في الحقيقة على اعتبار ان المتغيرات المعتمدة في الحساب هي متغيرات من النوع الكمي اي ممكنة القياس بوحدات قياس كمقياس الطول (سم) والوزن (كغم) او العمر .....الخ.

ولكن من الناحية العملية هناك الكثير من المتغيرات او الحالات التي لايمكن قياسها بوحدات اي تكون فيها المتغيرات من النوع الوصفي اي غير قابلة للقياس مثل (الحالة الاجتماعية والمهنة والمستوى العلمي .....الخ)، وان المعامل الذي يقيس درجة الارتباط ما بين صفتين يدعى معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) ويحسب وفق الصيغة التالية:

$$rs = 1 - \frac{6 \sum Di^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث ان (  $D_i$  ) = الفرق بين رتبة عنصرين متناظرين لكل زوج من القيم مع تخصيص الرتبة المتوسطة للملاحظات المتشابهة

$$Di = xi - yi$$

=n عدد المشاهدات

مثال 1/ احسب معامل الارتباط بين تقديرات (xi,yi)؟

$X_i$  = متوسط مقبول ضعيف جيد جداً جيد

$Y_i$  = متوسط جيد جداً جيد ضعيف ممتاز

الحل/ اولاً نرتب التقديرات تصاعدياً ونعطي لكل تقدير رتبة

$X_i$	ضعيف	مقبول	متوسط	جيد	جيد جداً
الرتب	1	2	3	4	5

$y_i$	ضعيف	متوسط	جيد	جيد جداً	ممتاز
الرتب	1	2	3	4	5

$x_i$	$Y_i$	رتبة $X_i$	رتبة $Y_i$	$D_i$	$D_i^2$
متوسط	متوسط	3	2	1	1
مقبول	جيد جداً	2	4	-2	4
ضعيف	جيد	1	3	-2	4
جيد جداً	ضعيف	5	1	4	16
جيد	ممتاز	4	5	-1	1
					26

$$rs = 1 - \frac{6 \sum Di^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$rs = 1 - \frac{6(26)}{5(25 - 1)} = 1 - \frac{6(26)}{5(24)} = 1 - \frac{156}{120} = 1 - 1.3 = -0.3$$

إذا العلاقة عكسي و ضعيفه

مثال 2/ كانت تقديرات (6) طلاب في مادتي الاحصاء والرياضيات ،كانت تقديرات درجة مادة الاحصاء (xi) (جيد ، متوسط ، ضعيف ، مقبول ، جيد جداً ، ممتاز) وتقديرات درجة الرياضيات (yi) (متوسط ، جيد ، مقبول ، ضعيف ، ممتاز ، جيد جداً) جد معامل الارتباط بين تقدير الطالب في الاحصاء وتقديره في الرياضيات؟

الحل/ اولاً نرتب البيانات تصاعدياً

Xi	ضعيف	مقبول	متوسط	جيد	جيد جداً	ممتاز
الرتب	1	2	3	4	5	6

yi	ضعيف	مقبول	متوسط	جيد	جيد جداً	ممتاز
الرتب	1	2	3	4	5	6

xi	Yi	رتبة Xi	رتبة Yi	Di	Di <sup>2</sup>
جيد	متوسط	4	3	1	1
متوسط	جيد	3	4	-1	1
ضعيف	مقبول	1	2	-1	1
مقبول	ضعيف	2	1	1	1
جيد جداً	ممتاز	5	6	-1	1
ممتاز	جيد جداً	6	5	1	1
					6

$$rs = 1 - \frac{6 \sum Di^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$rs = 1 - \frac{6(6)}{6(36 - 1)} = 1 - \frac{36}{6(35)} = 1 - \frac{36}{210} = 1 - 0.17 = 0.83$$

إذا العلاقة طردية و قوية



مثال 3/ تقديرات لكفاءة (10) من العاملين في احدى المصانع من حيث ادارتهم في تشغيل نوعين من المكائن الحديثة النوع الاول (xi) (جيد ، متوسط ، جيد جداً ، متوسط ، ممتاز ، ضعيف ، مقبول ، متوسط ، جيد ، جيد جداً) النوع الثاني (yi) (متوسط ، جيد ، جيد ، مقبول ، جيد جداً ، مقبول ، ضعيف ، متوسط ، متوسط ، ممتاز ،) جد معامل الارتباط بين تقدير الطالب في الاحصاء وتقديره في الرياضيات؟

الحل/ اولاً نرتب البيانات تصاعدياً

Xi	ضعيف	مقبول	متوسط	متوسط	متوسط	جيد	جيد	جيد	جيد جداً	ممتاز
الرتب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الرتب	1	2	4	4	4	7	7	7	9	10

Yi	ضعيف	مقبول	مقبول	متوسط	متوسط	متوسط	جيد	جيد	جيد جداً	ممتاز
الرتب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الرتب	1	2.5	2.5	5	5	5	7.5	7.5	9	10

xi	رتبة Xi	Yi	رتبة Yi	Di	Di <sup>2</sup>
جيد	7	متوسط	5	2	4
متوسط	4	جيد	7.5	-3.5	12.25
جيد جداً	9	جيد	7.5	1.5	2.25
متوسط	4	مقبول	2.5	1.5	2.25
ممتاز	10	جيد جداً	9	1	1
ضعيف	1	مقبول	2.5	-1.5	2.25
مقبول	2	ضعيف	1	1	1
متوسط	4	متوسط	5	-1	1
جيد	7	متوسط	5	2	4
جيد	7	ممتاز	10	-3	9
					39

$$rs = 1 - \frac{6 \sum Di^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$rs = 1 - \frac{6(39)}{10(100 - 1)} = 1 - \frac{234}{10(99)} = 1 - \frac{234}{990} = 1 - 0.24 = 0.76$$

إذا العلاقة طردية و قوية

مثال 4/جد معامل الارتباط الملائم حيث ان الطالب درجاته في المحاسبة والادارة هي في الادارة (xi) ( جيد ، ضعيف ، جيد جداً ، مقبول ، امتياز ، متوسط )

وفي المحاسبة (yi) ( امتياز ، متوسط ، جيد جداً ، ضعيف ، جيد ، مقبول )؟

الحل/ اولاً نرتب التقديرات تصاعدياً

Xi	ضعيف	مقبول	متوسط	جيد	جيد جداً	ممتاز
الرتب	1	2	3	4	5	6

yi	ضعيف	مقبول	متوسط	جيد	جيد جداً	ممتاز
الرتب	1	2	3	4	5	6

xi	رتبة Xi	yi	رتبة Yi	Di	Di <sup>2</sup>
جيد	4	امتياز	6	-2	4
ضعيف	1	متوسط	3	-2	4
جيد جداً	5	جيد جداً	5	0	0
مقبول	2	ضعيف	1	1	1
امتياز	6	جيد	4	2	4
متوسط	3	مقبول	2	1	1
					14

$$rs = 1 - \frac{6 \sum Di^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$rs = 1 - \frac{6(14)}{6(36 - 1)} = 1 - \frac{84}{6(35)} = 1 - \frac{84}{210} = 1 - 0.4 = 0.6$$

إذا العلاقة طردية متوسطة